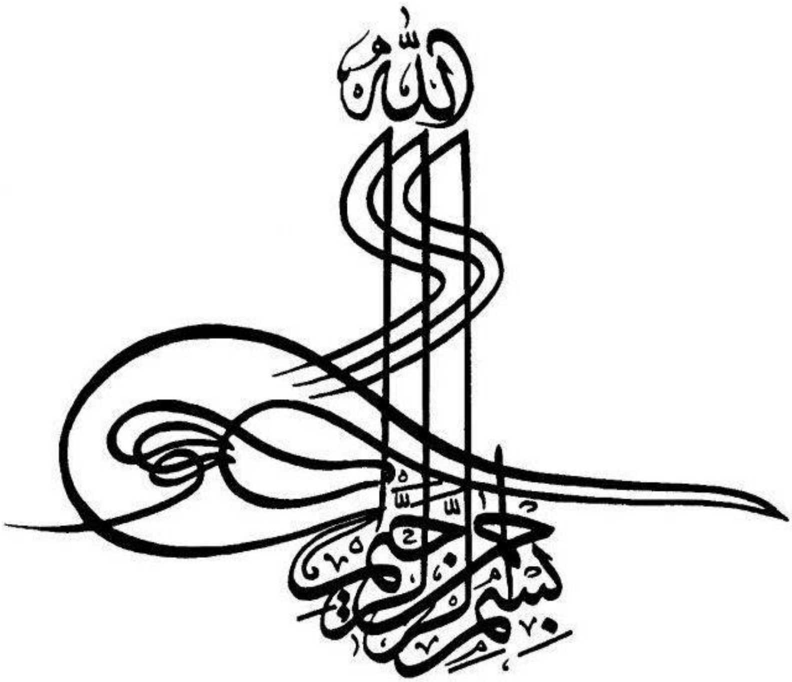


آمارو احتمال

(فصل هفتم ریاضی پایه دهم)

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین‌های برای آمادگی

مولف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل هفتم کتاب درسی ریاضی پایه دهم ، مبحث « امار و احتمال» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این جزوه با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این جزوه و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

فهرست مطالب

بخش اول

احتمال

۱-۷مفاهیم اولیه احتمال

پدیده (آزمایش) تصادفی: پدیده ها یا آزمایش هایی را که نتیجه آن به طور دقیق قابل پیش بینی نباشد، اما از همه ی حالت های ممکن در به وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم پدیده ها یا آزمایش های تصادفی می نامیم

مثال: نتیجه یک بازی فوتبال از قبل به طور دقیق قابل پیش بینی نیست اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد.

فضای نمونه ای: مجموعه ی همه ی حالت های ممکن در آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای گوئیم .

تذکر۱ : فضای نمونه ای را با s نشان می دهیم.

تذکر ۲: تعداد اعضای فضای نمونه ای را با $n(s)$ نشان می دهیم.

مثال: در پرتاب یک سکه فضای نمونه ای برابر است با $s = \{\text{رو ، پشت}\}$

مثال: در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای برابر است با $s = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می گوئیم.

تذکر ۱: پیشامد را با یکی از حروف بزرگ لاتین مانند $C, B, A, \ldots$ نشان دهیم.

تذکر ۲: تعداد اعضای پیشامد را با $n(A)$ نشان می دهیم.

تذکر ۳: پیشامد S را حتمی و پیشامد $\emptyset$ را نشدنی می گوئیم.

مثال: در پرتاب یک تاس مطلوبست:

الف) پیشامد آنکه عدد رو شده زوج باشد. $A = \{۲,۴,۶\}$

ب) پیشامد آنکه عدد رو شده اول باشد. $B = \{۲,۳,۵\}$

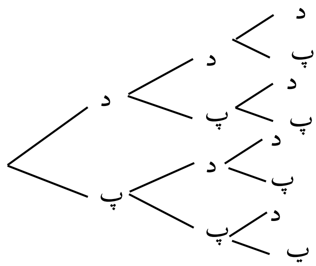
پ) پیشامد آنکه عدد رو شده بزرگتر از ۴ باشد. $C = \{۵,۶\}$

ت) پیشامد آنکه عدد رو شده کمتر از ۷ باشد (پیشامد حتمی) $D =$
$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = S \longrightarrow$

ث) پیشامد آنکه عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد. پیشامد نشدنی $\longrightarrow E = \{\,\} = \emptyset$

مثال :خانواده ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

حل)به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را مشخص می کنیم



فضای نمونه ای $S = \{$ پ پ پ , د پ پ , پ دپ, د د پ , پ پ د, د پ د, پ دد, ددد $\}$

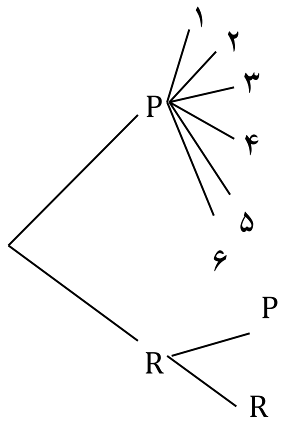
پیشامد $E = \{$ د پ پ , پ دپ, د د پ , پ پ د, د پ د, پ دد, ددد $\}$

مثال :سکه ای را به هوا می اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می اندازیم:

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه « تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه « حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.



الف) $S = \{P\,۱, P\,۲, P\,۳, P\,۴, P\,۵, P\,۶, P\,P, P\,R\}$

ب) $A = \{P\,۲, P\,۴, P\,۶\}$

پ) $B = \{P\,R\}$

نکته: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه ای S باشد احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نشان می دهیم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد فضای نمونه ای } S}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

$$=\frac{\text{تعداد حالات خواسته سوال}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

نکته : اگر S فضای نمونه ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این صورت:

$$I)\ ۰\leq P(A)\leq ۱$$

$$\text{زیرا}: A\subseteq S\Rightarrow ۰\leq n(A)\leq n(S)\Rightarrow \frac{۰}{n(S)}\leq\frac{n(A)}{n(S)}\leq\frac{n(S)}{n(S)}\Rightarrow$$

$$۰\leq P(A)\leq ۱$$

$$II)\ P(\emptyset)=۰\ ,P(S)=۱$$

مثال: یک تاس را پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) عدد رو شده زوج باشد.

جواب:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\},\quad A=\{۲\ ,۴\ ,۶\}\ ,P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

ب) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

جواب:

$$B = \{۳,۶\} \ , P(B) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

پ) عدد رو شده اول باشد.

جواب:

$$C = \{۲,۳,۵\} \ \ , \ \ P(C) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ت) عدد رو شده کمتر از ۷ باشد.

جواب:

$D = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = S \ , P(D) = \frac{۶}{۶} = ۱$ پیشامد حتمی (قطعی)

ث) عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد.

جواب:

$E = \{ \ \ \} = \emptyset \ , P(E) = \frac{۰}{۶} = ۰$ پیشامد غیر ممکن

نکته: در احتمال قطعی $P(S) = ۱$ و در احتمال نشدنی $P(\emptyset) = ۰$ است.

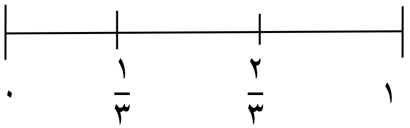
مثال :فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می توانیم بسازیم، روی یک کارت می نویسیم و آنها را در کیسه ای قرار می دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم:

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب « خارج شدن عدد زوج» و « خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟

$S = \{۴۳,۳۴,۲۴,۴۲,۲۳,۳۲,\}$

$A = \{۳۴,۲۴,۴۲,۳۲\}\,, B = \{۴۳,۲۳\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}\,, p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$



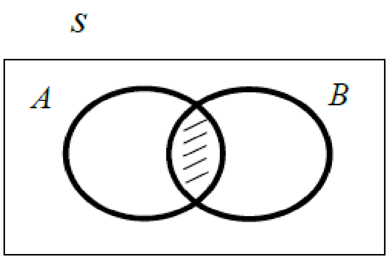
واضح است که $p(A) > P(B)$، پس شانس رخداد پیشامد A از سانس رخداد پیشامد B بیشتر است. (پس این مثال تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد، بیشتر است)

۲-۷قوانین احتمال

۱-۲-۷اشتراک دو پیشامد

اگر B و A دو پیشامد باشند، $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که دو پیشامد B و A رخ دهند.

هرگاه از ما بخواهند احتمال آن که B و A رخ دهد (هم A و هم B رخ دهد)، B و A **هر دو** رخ دهد) را به‌دست آوریم باید $P(A \cap B)$ را حساب کنیم.

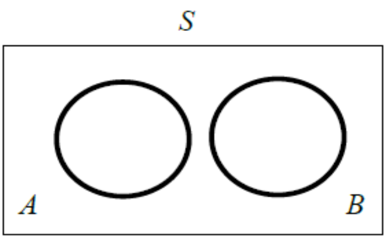


$A \cap B$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

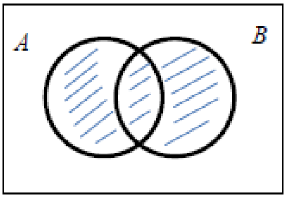
۲-۲-۷دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد B و A را ناسازگار می گوئیم هرگاه، با هم نتوانند رخ دهند به عبارت دیگر وقوع یکی به معنی عدم وقوع دیگری است. یعنی $A \cap B = \emptyset$ و $P(A \cap B) = ۰$



۳-۲-۷اجتماع دو پیشامد

اگر B و A دو پیشامد باشند، $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که یکی از پیشامدهای B و A یا هر دو رخ دهند. هرگاه از ما بخواهند احتمال آن که B یا A رخ دهد (**لااقل** یکی از پیشامدهای B یا A رخ دهد) را به‌دست آوریم، بایستی $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم.



A ∪ B

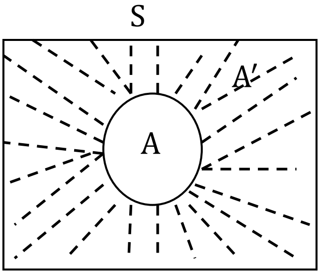
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

نکته: اگر B و A دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۴-۲-۷متمم یک پیشامد:

متمم پیشامد A را با A' یا A^C نشان می دهیم این پیشامد در صورتی می دهد که A رخ ندهد در احتمالات بین A و A' رابطه ی زیر برقرار است.



$$P(A) + P(A') = ۱ \Rightarrow \begin{cases} P(A) = ۱ - P(A') \\ P(A') = ۱ - P(A) \end{cases}$$

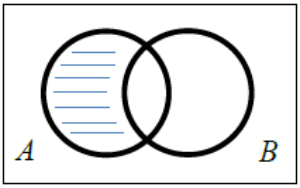
نکته: $A \cap A' = \emptyset$
$A \cup A' \neq S$

دقت کنیم : از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در این صورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته، احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم می کنیم.

۵-۲-۷تفاضل دو پیشامد

اگر B و A دو پیشامد باشند $\mathrm{A - B}$ زمانی رخ می دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد. (**فقط A** رخ دهد).

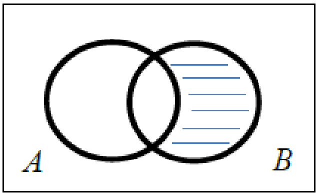
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



A-B

اگر B و A دو پیشامد باشند $\mathrm{B - A}$ زمانی رخ می دهد که B رخ دهد ولی A رخ ندهد. (**فقط B** رخ دهد).

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$



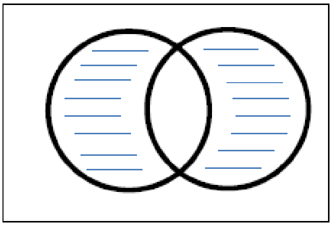
- اگر B و A دو پیشامد ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-۰=P(A)$$

۶-۲-۷تفاضل متقارن

اگر B و A دو پیشامد باشند $(A-B)\cup(B-A)$ وقتی رخ می دهد که

فقط A یا فقط B رخ دهد. (فقط یکی از پیشامدها رخ دهد)



(A-B) ∪ (B-A)

$$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A\cup B)-(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

مثال :یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری AوB را می پذیرد اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A $\left(P(A)=\frac{۳۴}{۱۰۰}\right)$ و ۶۲ درصد کارت نوع Bو ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳۴}{۱۰۰} + \frac{۶۲}{۱۰۰} - \frac{۱۵}{۱۰۰} = \frac{۸۱}{۱۰۰}$$

مثال: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ و برای هردو ۰/۷۲ است. با کدام احتمال، لا اقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸ √

جواب:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = ۰/۹ + ۰/۸ - ۰/۷۲ = ۰/۹۸$$

مثال: احتمال قبولی دانش آموزی در درس فیزیک، ۰/۵۵ و در درس شیمی، ۰/۶ است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود، ۰/۷۵ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می شود؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۰/۳۵ ۲) ۰/۴ √ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۵

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$۰/۷۵ = ۰/۵۵ + ۰/۶ - P(A \cap B)$$

$$۰/۷۵ = ۱/۱۵ - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = ۱/۱۵ - ۰/۷۵ \rightarrow \frac{۱۱۵}{۱۰۰} - \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{۴۰}{۱۰۰}$$

مثال: احتمال آن که فرزندی در یک خانواده با چشم های روشن متولد شود ۰/۲ و احتمال آن که رنگ مویش روشن باشد، ۰/۳ است. اگر احتمال متولد شدن فرزندی با مو و چشم به رنگ روشن ۰/۱ باشد. احتمال آن را بیابید که فرزند متولد شده فقط موی روشن داشته باشد.

۱) ۰/۲ √ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

جواب:

$P(A) = ۰/۲$ چشم روشن , $P(B) = ۰/۳$ رنگ موی روشن

$P(A \cap B) = ۰/۱$ چشم روشن و رنگ مو روشن

$P(B-A) =?\ \rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = ۰/۳ - ۰/۱ = ۰/۲$

تمرین: ۰/۳ احتمال دارد فرزندی در یک خانواده با گروه خونی A متولد شود، و احتمال آن که رنگ چشم فرزند میشی باشد، ۰/۴ است. اگر احتمال متولد شده فرزندی با گروه خونی A و رنگ چشم میشی ۰/۱۵ باشد؛ مطلوبست احتمال آن که:

الف) حداقل یکی از آن ها گروه خونی A یا رنگ چشم میشی داشته باشد.

جواب: ۰/۵۵

ب) فقط گروه خونی A داشته باشد.

جواب: ۰/۱۵

ت) فقط گروه خونی A یا فقط رنگ چشم میشی داشته باشد.

جواب: ۰/۴

مثال: کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند:

تحصیلات	جنسیت	
	زن	مرد
دانشگاهی	۱۰	۱۵
کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

الف) احتمال آن که کارمندی زن باشد و تحصیلات دانشگاهی داشته باشد.

جواب:

$$A: \text{زن باشد} \rightarrow P(A) = \frac{۹۰}{۱۹۵}$$

$$B: \text{مرد باشد} \rightarrow P(B) = \frac{۱۰۵}{۱۹۵}$$

$$C: \text{تحصیلات دانشگاهی داشته باشد} \rightarrow P(C) = \frac{۲۵}{۱۹۵}$$

$$D: \text{تحصیلات کمتر از دانشگاهی داشته باشد} \rightarrow P(D) = \frac{۱۷۰}{۱۹۵}$$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۹۵}$$

ب) احتمال آن که کارمندی مرد باشد یا تحصیلات دانشگاهی داشته باشد.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{۱۰۵}{۱۹۵} + \frac{۲۵}{۱۹۵} - \frac{۱۵}{۱۹۵} = \frac{۱۱۵}{۱۹۵}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A) = P(\acute{B}) = \frac{۱}{۳}$ آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۰ = ۱$$

مثال: اگر $P(A \cup B) = \frac{۳}{۵}, P(B) = \frac{۱}{۳}, P(A) = \frac{۲}{۵}$ باشد $P(A - B)$ را به‌دست آورید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۵} - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = \frac{۲}{۱۵}$$

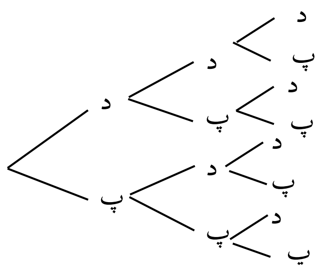
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

۳-۱۷ احتمال های مربوط به فرزند و سکه

نکته : برای حل احتمال های مربوط به فرزند یا سکه با استفاده از نمودار درختی فضای نمونه ای را مشخص می کنیم سپس اعضای پیشامد را از فضای نمونه ای انتخاب می کنیم و از فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ احتمال را به دست می آوریم.

مثال : خانواده ای دارای ۳ فرزند است مطلوبست احتمال آنکه یک فرزند دختر داشته باشد ؟

حل)به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را مشخص می کنیم



فضای نمونه ای $S=\{$ پ پ پ , د پ پ , پ د پ , د د پ , پ پ د , د پ د , د د پ , ددد $\}$

پیشامد $E=\{$ د پ پ , پ د پ , پ پ د $\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد فضای نمونه ای } S} = \frac{۳}{۸}$$

روش کنکوری احتمال های مربوط به فرزند و سکه

حالت اول)ترتیب فرزندان بیان نشود

نکته: در یک خانواده‌ی n فرزندی احتمال آن که دقیقاً k فرزند پسر (دختر) باشد از فرمول $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ به‌دست می‌آید. (از این فرمول وقتی استفاده می‌کنیم که تولد دختر و پسر هم شانس باشند و ترتیب فرزندان بیان نشود.)

روش دوم : اگر ترتیب فرزندان بیان نشود خودمان یک ترتیب بیان می‌کنیم و در تعداد جایگشت‌ها ضرب می‌کنیم

در مثال قبل: $P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{۲^n} = \frac{\binom{۳}{۱}}{۲^۳} = \frac{۳}{۸}$

مثال: یک خانواده دارای چهار فرزند است. مطلوبست احتمال آن که:

الف) یک فرزند دختر داشته باشد.

جواب: $\frac{۱}{۴}$

راه حل اول:

$$\frac{\binom{۴}{۱}}{۲^۴}$$

راه حل دوم:

$\rightarrow$ (پ پ پ د)

$$\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)\times\frac{۴!}{۳!}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

تذکر: در روش دوم ما یک ترتیب دلخواه را در نظر می گیریم، سپس در جایگشت فرزندان ضرب می کنیم.

ب) یک فرزند دختر و سه فرزند پسر داشته باشد.

جواب: $\frac{۱}{۴}$

راه حل اول: $\frac{\binom{۴}{۱}}{۲^{۴}}$

راه حل دوم:

$\rightarrow$ (پ پ پ د)

$$\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)\times\frac{۴!}{۳!}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

پ) دو فرزند پسر داشته باشد.

جواب: $\frac{۳}{۸}$

راه حل اول:

$$\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

روش دوم:

$$\left(\text{پ د پ د}\right) \rightarrow$$

$$\left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) \times \frac{۴!}{۲! \times ۲!}$$

ت) دو فرزند پسر و دو فرزنددختر داشته باشد. (سراسری تجربی ۸۴)

جواب: $\frac{۳}{۸} = \frac{۶}{۱۶}$ (همان قسمت پ می‌باشد.)

ث) دو فرزند پسر یا سه فرزند دختر داشته باشد. (سراسری تجربی ۹۰)

جواب:

$$\text{دو فرزند پسر } A: \rightarrow P(A) = \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} = \frac{۶}{۱۶}$$

$$\text{سه فرزند دختر } B: P(B) = \frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴} = \frac{۴}{۱۶}$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = ۰$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{۶}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} - ۰ = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

ج) فرزندان همجنس باشند.

جواب:

$$\underbrace{\frac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴}}_{\text{هر ۴ تا دختر}} \underbrace{+}_{\text{یا}} \underbrace{\frac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴}}_{\text{هر ۴ تا پسر}} = \frac{۲}{۱۶} = \frac{۱}{۸}$$

چ) فرزندان همجنس نباشند.

جواب: متمم این مساله، فرزندان هم جنس می‌باشدکه در قسمت قبل حل شد. بنابراین :

$$۱ - \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

دقت کنیم : از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در این صورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته، احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم می کنیم.

ح) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

$$\underbrace{\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}}_{\text{۳ پسر}} \underbrace{+}_{\text{یا}} \underbrace{\frac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴}}_{\text{۴ پسر}} = \frac{۴}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶}$$

خ) تعداد فرزندان دختر و پسر با هم برابر باشد.

جواب: ۲پسر و ۲دختر به قسمت پ و ت مراجعه شود. که مقدار آن برابر است با: $\frac{۳}{۸}$

د) تعداد فرزندان دختر و پسر با هم متفاوت باشد.

جواب: متمم این مساله تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند که در قسمت قبل حل شد. بنابراین :

$$۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

ذ) حداقل یک فرزند پسر داشته باشد.

جواب: متمم این مساله برابر است با، هیچکدام از فرزندان پسر نباشند. که مقدار آن برابر است با:

$$۱-\frac{\binom{۴}{۰}}{۲^{۴}}=۱-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

ر) حداکثر دو فرزند دختر داشته باشد.

جواب: متمم این مساله برابر است با ۳ یا ۴دختر داشته باشد. که مقدار آن برابر است با:

$$۱-\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}}{۲^{۴}}=۱-\frac{۴+۱}{۱۶}=۱-\frac{۵}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

مثال: در یک بیمارستان ۵ نوزاد متولد شده‌اند با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

$$۱-\frac{\binom{۵}{۰}+\binom{۵}{۱}}{۲^{۵}}=۱-\frac{۶}{۳۲}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

مثال: خانواده‌ای دارای ۶ فرزند است احتمال آن که آخرین فرزند سومین پسر خانواده باشد کدام است؟

جواب:

$$\underbrace{\square\square\ \square\square\square}_{\text{از ۵ تای اول ۲ فرزند پسر است}}\quad \underbrace{\boxed{\text{پ}}}_{\text{سومین پسر خانواده}}\quad \rightarrow \frac{\binom{5}{2}}{2^5}\times\frac{1}{2}$$

مثال: سکه‌ای آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای سومین بار رو بیاید، احتمال آن که در هشتمین پرتاب به این منظور برسیم، کدام است؟

۱) $\frac{121}{128}$ ۲) $\frac{28}{56}$ ۳) $\frac{56}{256}$ ۴) $\frac{21}{256}$ √

جواب:

$$\square\square\ \square\square\square\square\square\quad \underbrace{\boxed{\text{پ}}}_{\text{سومین رو}}\ \rightarrow P=\frac{\binom{7}{2}}{2^7}\times\frac{1}{2}=\frac{21}{2^8}=\frac{21}{256}$$

حالت دوم) ترتیب فرزندان بیان شود (اصل ضرب)

مثال: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که:

الف) فرزند اول و دوم پسر باشد.

جواب:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{اول پسر}}\times\overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{دوم پسر}}\times\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}^{\text{سوم دختر یاپسر}}\times\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}^{\text{سوم دختر پسر}}=\frac{1}{4}\times 1\times 1=\frac{1}{4}$$

ب) فقط فرزند اول و دوم پسر باشد.

جواب:

$$\text{پ پ د د}\rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

پ) فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

جواب:

د د پ پ $\rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$

ت) فرزند آخر دختر باشد.

جواب:

$\begin{array}{c} (\boxed{\text{د}}\ \text{د د د}) \\ (\boxed{\text{پ}}\ \text{پ پ پ}) \end{array} \rightarrow \frac{۲}{۲}\times\frac{۲}{۲}\times\frac{۲}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

ث) فقط فرزند آخر دختر باشد.

جواب:

د پ پ پ $\rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$

ج) فرزند دوم و چهارم پسر باشد.

جواب:

$\begin{array}{c} (\text{د} - \text{د} -) \\ (\text{پ پ پ پ}) \end{array} \rightarrow \frac{۲}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

چ) فرزندان یک در میان دختر، پسر (پسر، دختر) باشند.

جواب: فرزندان به صورت (پ د پ د) یا (د پ د پ) هستند بنابراین داریم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۸}$$

مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که فرزند اول پسر باشد یا خانواده دارای ۲ فرزند پسر باشد؟

جواب:

$$A\text{: فرزند اول پسر}\ \left\{\text{د پ پ ، پ د پ، پ پ پ ، د د پ}\right\} \rightarrow p(A) = \frac{۴}{۸}$$

$$B\text{: دو فرزند پسر}\ \left\{\text{پ د پ، پ پ د ، د پ پ}\right\} \rightarrow p(B) = \frac{۳}{۸}$$

$$A \cap B = \left\{\text{د پ پ ، پ د پ}\right\} \rightarrow p(A \cap B) = \frac{۲}{۸}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{۴}{۸} + \frac{۳}{۸} - \frac{۲}{۸} = \frac{۵}{۸}$$

۴-۱۷احتمال های مربوط به پرتاب تاس

الف)احتمال های مربوط به دو تاس

نکته :برای حل احتمال های مربوط به دو تاس ابتدا با استفاده از جدول زیر فضای نمونه ای را مشخص می کنیم سپس اعضای پیشامد را از فضای نمونه ای انتخاب می کنیم و احتمال را از فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ به دست می آوریم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

نکته: اعضای فضای نمونه ای در پرتاب n تاس برابر ۶^n است.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) مجموع دو عدد رو شده مضرب ۵ باشد.

$$A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\} \text{ و } P(A)=\frac{۷}{۳۶}$$

ب) مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد. (سراسری تجربی ۹۲)

$$B = \{(۱,۳) , (۲,۲) , (۳,۱) , (۲,۶) , (۳,۵) , (۴,۴) , (۵,۳) , (۶,۲) , (۶,۶)\}$$

$$n(B) = ۹ , P(B) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

پ) مجموع اعداد رو شده مربع یک عدد طبیعی باشد. مثل (۳، ۱) و (۲، ۲) و...

جواب: $\frac{۷}{۳۶}$

ت) مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ باشد.

جواب: $\frac{۳۰}{۳۶}$

ث) مجموع اعداد رو شده برابر ۴ یا ۹ باشد.

جواب:

$$\text{مجموع } ۴: A = \{(۱,۳), (۲,۲), (۳,۱)\} \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۳۶}$$

$$\text{مجموع } ۹: B = \{(۳,۶), (۴,۵), (۵,۴), (۶,۳)\} \rightarrow P(B) = \frac{۴}{۳۶}$$

$$A \cap B = \{\quad\} \rightarrow p(A \cap B) = ۰$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۳۶} + \frac{۴}{۳۶} - ۰ = \frac{۷}{۳۶}$$

ج) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا هر دو فرد باشند.

جواب: $\frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{۳۶}$

چ) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ و هر دو فرد باشند.

جواب: $\frac{۲}{۳۶}$

ح) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا زوج باشند.

جواب: $\frac{۱۱}{۳۶}$

خ) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ و هر دو زوج باشند.

جواب: $\frac{۳}{۳۶}$

د) اعداد رو شده زوج و اختلافشان برابر ۲ باشد.

جواب: $\frac{۴}{۳۶}$

ذ) دو تاس یکسان ظاهر شوند یا مجموعشان بزرگتر از ۹ باشد.

جواب: $\frac{۵}{۱۸}$

مثال: در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن که اعداد رو شده متوالی باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ √۴) $\frac{۵}{۱۸}$

جواب:

$$A = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴),(۶,۵)\}$$
$$n(A) = ۱۰, P(A) = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

مثال: یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم احتمال آن که عددی که بار دوم رو می‌شود کمتر از بار اول باشد؟

√۱) $\frac{۱۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۸}{۳۶}$

جواب:

$$A = \{(۲,۱),(۳,۱),(۴,۱),(۴,۲),\ldots\}, n(A) = ۱۵, P(A) = \frac{۱۵}{۳۶}$$

تمرین: در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن که حداقل یکی از دو تاس ۵ بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ √۳) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم (یا یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم) مطلوبست احتمال آن که:

الف) اعداد رو شده تاس مثل هم باشند.

جواب:

$$A=\{(۱,۱),(۲,۲),\dots,(۶,۶)\},n(A)=۶,P=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ب) اعداد رو شده تاس مثل هم نباشند.

جواب: $۱-\frac{۶}{۳۶}=\frac{۳۰}{۳۶}=\frac{۵}{۶}$

نکته : اگر دو تاس با هم در گیر باشند مانند مجموع ؛ تفاضل و... حتما بایستی با نوشتن اعضای پیشامد تعداد آن را به دست آوریم

نکته : درصورتی که دو تاس با هم درگیر نباشند: مانند هر دو تاس مضرب ۳، هر دو تاس زوج، حاصل ضرب دو تاس فرد و هر دو تاس عدد اول و... علاوه بر روش قبل می توانیم با استفاده از اصل ضرب نیز تعداد اعضای پیشامد را به دست آوریم .

مثال : دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم (یا یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم) مطلوبست احتمال آن که:

الف) اعداد رو شده‌ی تاس متمایز باشند.

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۶}}_{\text{تاس اول ۶ حالت دارد.}}\times\underbrace{\boxed{۵}}_{\text{تاس دوم ۵ حالت دارد.}}=۳۰,P=\frac{۳۰}{۳۶}=\frac{۵}{۶}$$

ب) اعداد رو شده‌ی دو تاس مضرب ۳ باشند.

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\text{۶ یا ۳}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\text{۶ یا ۳}} = ۲ \times ۲ = ۴ \text{ و } P = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

پ) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند.

جواب: از متمم آن را حل می‌کنیم که اعداد رو شده مضرب ۳ باشند. (اگر یکی از اعداد مضرب ۳ باشد ایرادی ندارد).

$$۱ - \frac{۴}{۳۶} = \frac{۳۲}{۳۶}$$

اگر می‌گفت اعداد رو شده‌ی هر دو تاس مضرب ۳ نباشد جواب آن به صورت زیر است:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۴}}_{\text{۵ یا۴ یا ۲ یا۱}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\text{۵ یا۴ یا ۲ یا۱}} = ۱۶\,, P(A) = \frac{۱۶}{۳۶}$$

ت) هر دو تاس عدد اول باشند.

جواب:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۳}}_{\text{۵ یا۳ یا ۲}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\text{۵ یا۳ یا ۲}} = ۹\,, P(A) = \frac{۹}{۳۶}$$

ث) حداقل یکی از تاس‌ها عدد اول باشد.

جواب: $p = \frac{۲۷}{۳۶}$

ج) حاصلضرب اعداد رو شده فرد باشد.

جواب: $p = \frac{۹}{۳۶}$

ح) حاصلضرب اعداد رو شده زوج باشد.

جواب: $p = \frac{۲۷}{۳۶}$

ب)احتمال های مربوط به سه تاس

مثال: سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوبست احتمال آن که:

$$n(S) = ۶^۳ = ۶ \times ۶ \times ۶$$

الف) اعداد ظاهر شده مثل هم باشند؟

جواب: $\frac{۶}{۶\times۶\times۶} = \frac{۱}{۳۶}$

ب) اعداد ظاهر شده مثل هم (یکسان) نباشند.

جواب: $۱ - \frac{۱}{۳۶} = \frac{۳۵}{۳۶}$

پ) اعداد ظاهر شده متمایز باشند.

جواب: برای به‌دست آوردن تعداد اعضای پیشامد تاس اول ۶ حالت دارد، تاس دوم ۵ حالت و تاس سوم ۴ حالت، که احتمال آن به صورت زیر است:

$$n(A) = ۶ \times ۵ \times ۴ \,, \mathrm{P}(A) = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۵}{۹}$$

ت) حداقل دو عدد مثل هم باشند.

جواب: $۱ - \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{۹}$

متمم: هیچ دو عددی مثل هم نباشند (اعداد متمایز باشند).

ث) اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشند.

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}}=۸\,,P(A)=\frac{۸}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۲۷}$$

ج) اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نباشند ؟

جواب: $۱-\frac{۱}{۲۷}=\frac{۲۶}{۲۷}$

چ) هر سه عدد ظاهر شده مضرب ۳ نباشند.

$$n(A)=\overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}}\times\overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}}\times\overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}}\quad \text{و}\quad P(A)=\frac{۴\times۴\times۴}{۶\times۶\times۶}$$

ح) فقط دو تاس مضرب ۳ باشد.

$$n(A)=\overbrace{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}}}^{\text{مضرب ۳ باشد.}}\times\overbrace{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}}}^{\text{مضرب ۳ باشد.}}\times\overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}}\times\frac{۳!}{۲!}\quad \text{و}\quad P(A)=\frac{۲\times۲\times۴\times\frac{۳!}{۲!}}{۶\times۶\times۶}$$

خ) هر سه عدد مضرب ۲ باشند.

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۴\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۴\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۴\\۶}}\quad \text{و}\quad P(A)=\frac{۳\times۳\times۳}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۸}$$

د) حاصلضرب سه عدد رو شده فرد باشد (بایستی هر سه عدد فرد باشند).

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۳\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۳\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۳\\۵}}$$ و $$P(A)=\frac{۳\times۳\times۳}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۸}$$

ذ) حاصلضرب سه عدد رو شده زوج باشد.

جواب: $۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$

متمم: حاصلضرب سه عدد رو شده فرد باشد.

ر) یک بار ۶ و دو بار عدد دیگری ظاهر شود.

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۱}}_{۶}\times\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}}\times\underbrace{\frac{۳!}{۲!}}_{\text{تعداد جایگشت ها}}$$ و $$P(A)=\frac{۱\times۵\times۵\times\frac{۳!}{۲!}}{۶\times۶\times۶}=\frac{۲۵}{۷۲}$$

ز) فقط یک بار ۶ ظاهر شود ؟

جواب:مشابه قسمت (ر) است.

ژ) در بار سوم عدد ۶ رخ دهد.

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۶}$$ و $$P(A)=\frac{۶\times۶\times۱}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۶}$$

س) فقط در بار سوم عدد ۶ رخ دهد.

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۶}$$ و $$P(A) = \frac{۵ \times ۵ \times ۱}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۲۵}{۲۱۶}$$

ش) مجموع اعداد ظاهر شده از ۱۶ بزرگتر باشد.

جمع سه عدد ۱۸ شود: $(۶,۶,۶) \to \frac{۳!}{۳!} = ۱$.

جمع سه عدد ۱۷ شود: $(۶,۶,۵) \to \frac{۳!}{۲!} = ۳$.

$$\to P = \frac{۴}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۱}{۵۴}$$

ص) مجموع اعداد ظاهر شده از ۱۵ بزرگتر باشد؟

جمع سه عدد ۱۸ شود: $(۶,۶,۶) \to \frac{۳!}{۳!} = ۱$.

جمع سه عدد ۱۷ شود: $(۶,۶,۵) \to \frac{۳!}{۲!} = ۳$.

جمع سه عدد ۱۶ شود $\begin{cases} (۶,۵,۵) \to \frac{۳!}{۲!} = ۳ \\ (۶,۶,۴) \to \frac{۳!}{۲!} = ۳ \end{cases}$.

$$\to P = \frac{۱۰}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۱۰}{۲۱۶}$$

ض) مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از ۵ باشد.

جمع سه عدد ۳ شود: $(۱,۱,۱) \to \frac{۳!}{۳!} = ۱$.

جمع سه عدد ۴ شود: $(۱,۱,۲) \to \frac{۳!}{۲!} = ۳$.

$$\to P = \frac{۱ + ۳}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۴}{۲۱۶}$$

ط) مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۵ باشد.

جواب: $۱ - \frac{۱۰}{۲۱۶}$

متمم: مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۵ نباشد (کوچکتر یا مساوی ۵ شود).

۵-۷ احتمال پرتاب سکه و تاس با هم

مثال: یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم، اگر عددی اول ظاهر شود یک تاس سالم دیگر، و اگر عدد مرکب ظاهر شود دو سکه با هم، و در غیر این صورت یک سکه سالم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

جواب:

$$\underbrace{\overset{۲\ ۳\ ۵}{\boxed{۳}}}_{\text{عدد اول}} \times \underbrace{\overset{۱۲۳۴۵۶}{\boxed{۶}}}_{\text{تاس دیگر}} = ۱۸ \ \text{یا}\ \underbrace{\overset{۴\ ۶}{\boxed{۲}}}_{\text{عدد مرکب}} \times \underbrace{\overset{\text{پ ر}}{\boxed{۲}}}_{\text{سکه}} \times \underbrace{\overset{\text{پ ر}}{\boxed{۲}}}_{\text{سکه}} = ۸ \ \text{یا}\ \underbrace{\overset{۱}{\boxed{۱}}}_{\text{عدد یک}} \times \underbrace{\overset{\text{پ ر}}{\boxed{۲}}}_{\text{سکه}} = ۲$$

$$n(S) = ۱۸ + ۸ + ۲ = ۲۸$$

نکته: برای احتمال‌های مربوط به سکه و تاس با هم احتمال‌های مربوط به هر کدام را جداگانه حساب می‌کنیم. اگر بین آن ها <u>و</u> به کار رفته بود در هم ضرب می‌کنیم (اشتراک)، اگر <u>یا</u> به کار رفته بود (اجتماع) را حساب می‌کنیم.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \ \text{اشتراک}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \ \text{اجتماع}$$

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که:

الف) عدد تاس مضرب ۳ و سکه شیر بیاید.

جواب:

$$A = \{۳,۶\} \to P(A) = \frac{۲}{۶}\,, B = \{\text{ش}\,,\text{خ}\} \to P(B) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۲}{۶} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$

ب) عدد تاس مضرب ۳ یا سکه شیر باشد.

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

مثال: در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم احتمال این که حداقل یک رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ √ ۴) $\frac{۱}{۳}$

جواب:

$$S = \{(ر\ ر), (پ\ پ), (پ\ ر), (ر\ پ)\}$$ دو سکه

$$A = \{(ر\ ر), (پ\ ر), (ر\ پ)\} \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۴}$$ حداقل یک رو

$$B = \{۳, ۶\} \rightarrow P(B) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$ تاس مضرب ۳

$$P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۴}$$

مثال: در پرتاب سه سکه و یک تاس با هم احتمال این که دو رو و عدد تاس مضرب ۳ نباشد کدام است؟

جواب:

$$\begin{cases} \text{دو رو } A: P(A) = \dfrac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳} = \dfrac{۳}{۸} \\ \\ \text{مضرب ۳ نباشد } B: P(B) = \dfrac{۴}{۶} \end{cases} \to P(A \cap B) = \frac{۳}{۸} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۱}{۴}$$

مثال: در پرتاب دو سکه و دو تاس با هم، احتمال این که حداکثر یک پشت یا اعداد دو تاس فرد باشند کدام است؟

$$\text{حداکثر یک پشت } A:\ P(A) = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{دو تاس فرد } B:\ P(B) = \frac{۹}{۳۶}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} + \frac{۹}{۳۶} - \left(\frac{۳}{۴} \times \frac{۹}{۳۶}\right)$$

۶-۷ احتمال های مربوط به انتخاب(انتخاب مهره؛ انتخاب موش ...)

مثال: کیسه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، سه مهره به تصادف و با هم از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) فقط یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$n(S)=\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵\,,n(A)=\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۲}=۷۵$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷۵}{۱۶۵}$$

ب) هر سه مهره آبی باشند.

جواب:

$$P(A)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۷}{۰}}{۱۶۵}=\frac{۴}{۱۶۵}$$

ج) حداکثر دو مهره آبی باشد.

جواب:

$$P(\acute{B})=۱-P(B)=۱-\frac{۴}{۱۶۵}=\frac{۱۶۱}{۱۶۵}$$

د) یک مهره آبی و حداکثر یک مهره زرد باشد؟

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}}{۱۶۵}+\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{۱۶۵}=\frac{۴۰}{۱۶۵}+\frac{۴۰}{۱۶۵}=\frac{۸۰}{۱۶۵}$$

ه) دو مهره سفید و حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۰}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۲}}{۱۶۵}=\frac{۶۰}{۱۶۵}$$

و) هر سه مهره همرنگ باشند.

جواب:

$$P(C)=\frac{\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}}{۱۶۵}=\frac{۱۴}{۱۶۵}$$

ز) مهره‌ها همرنگ نباشند.

جواب:

$$P(\acute{C})=۱-P(C)=۱-\frac{۱۴}{۱۶۵}=\frac{۱۵۱}{۱۶۵}$$

نکته: احتمال مهره ها همرنگ باشند − ۱ = احتمال حداکثر دو مهره همرنگ باشند.

ح) حداکثر دو مهره همرنگ باشد؟

جواب:

احتمال مهره ها همرنگ باشند − ۱ = احتمال حداکثر دو مهره همرنگ باشند

$$۱-\frac{۱۴}{۱۶۵}=\frac{۱۵۱}{۱۶۵}$$

ط) مهره‌ها متمایز باشند (هیچ دو مهره‌ای هم رنگ نباشد).

جواب:

$$P(D) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{۱۶۵} = \frac{۴۰}{۱۶۵}$$

ی) حداقل دو مهره هم رنگ باشد.

$$P(D') = ۱ - P(D) = ۱ - \frac{۴۰}{۱۶۵} = \frac{۱۲۵}{۱۶۵}$$

نکته: احتمال هیچ دو مهره ای همرنگ نباشند – ۱= احتمال حداقل دو مهره همرنگ باشند.

ح) هیچکدام از مهره‌ها سفید نباشند.

جواب:

$$P(E) = \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{۱۶۵} = \frac{۲۰}{۱۶۵}$$

ط) حداقل یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$P(\acute{E}) = ۱ - \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۱۴۵}{۱۶۵}$$

ی) یک مهره آبی و حداقل یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۱} \times \binom{۲}{۱} + \binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} \times \binom{۲}{۰}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

ک) حداکثر سه مهره آبی باشد؟

جواب:۱

ل) حداقل دو مهره زرد باشد؟

جواب: $\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}}$

مثال : در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) هر سه مهره آبی باشند.

الف) $n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!\,۴!} = ۳۵$

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۳}}{۳۵} = \frac{۴}{۳۵}$$

ب) هر سه مهره همرنگ باشند.

ب) $P(B) = \frac{\binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳}}{۳۵} = \frac{۱}{۷}$ یا هر سه مهره آبی ، یا هر سه قرمز

پ) دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند.

پ) $P(C) = \frac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۱} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۱}}{۳۵} = \frac{۱۸ + ۱۲}{۳۵}$ دو مهره قرمز و یک مهره آبی یا دو آبی و یک قرمز

مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ اند؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

√۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴+۱۰}{۸۴}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟ (سراسری تجربی ۹۴)

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$ √ ۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

جواب:

$$P\left(\text{همرنگ نبودن ۲ مهره ی انتخابی}\right)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=$$

$$\frac{(۳\times۲)+(۳\times۵)+(۲\times۵)}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

تمرین: در جعبه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره ها سفید است ؟(سراسری تجربی خارج ۹۵)

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

مثال: درظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می شود؟ (سراسری تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$ √ ۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{(۴\times ۱۰)+(۶\times ۵)+(۴\times ۱)}{۸۴}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

مثال: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ √ ۴) $\frac{۳}{۵}$

جواب:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۳}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۳۰}{۷۰}=\frac{۳}{۷}$$

مثال۱۲۸: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن ها خارج می کنیم، با کدام احتمال لا اقل یکی از موش ها سفید است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$ √

جواب: خواسته سوال ۱یا ۲ یا ۳ تا از موش ها سفید باشند متمم آن برابر هیچ‌کدام سفید نباشند.

$$P(A')=۱-\frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=۱-\frac{۲۰}{۱۶۵}=\frac{۱۴۵}{۱۶۵}=\frac{۲۹}{۳۳}$$

تمرین: در جعبه ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید است؟(سراسری تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ √ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

مثال: در آزمایشگاهی ۴ موش سفید و ۷ موش سیاه نگهداری می شوند. سه موش به تصادف بیرون می آوریم، احتمال آن که تعداد موش های سیاه بیشتر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۸۴}{۱۶۵}$ ۲) $\frac{۱۰۹}{۱۶۵}$ ۳) $\frac{۵۶}{۱۶۵}$ √ ۴) $\frac{۱۱۹}{۱۶۵}$

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{۲۱\times ۴+۳۵\times ۱}{۱۶۵}=\frac{۱۱۹}{۱۶۵}$$

مثال: در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن ها خارج می کنیم مطلوب است احتمال آن که:

الف) هر دو موش سفید باشند.

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۶\times ۱}{۴۵}=\frac{۶}{۴۵}$$

ب) فقط یک موش سفید باشد.

جواب:

$$P(B)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۴\times ۶}{۴۵}=\frac{۲۴}{۴۵}$$

ج) موش سفید در بین آن ها نباشد.

جواب:

$$P(C)=\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۱\times ۱۵}{۴۵}=\frac{۱۵}{۴۵}$$

مثال: از بین ۳ موش سفید، ۴ موش سیاه و ۵ موش خاکستری، ۳ موش به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که حداقل دو موش همرنگ باشد؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ✓ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۱۱۰}$ ۴) $\frac{۱۰۳}{۱۱۰}$

جواب: برای به‌دست آوردن احتمال آن که حداقل دو موش همرنگ باشد، از متمم استفاده می کنیم. که متمم آن برابراست با هیچ دو موشی مثل هم نباشد (موش‌ها متمایز باشند).

$$P(\acute{A})=۱-\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=۱-\frac{۳\times ۴\times ۵}{\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{۳\times ۲\times ۱}}=۱-\frac{۳\times ۴\times ۵}{۲\times ۱۱\times ۱۰}$$

$$=۱-\frac{۳}{۱۱}=\frac{۸}{۱۱}$$

مثال: ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم احتمال آن که:

الف) یک لامپ سالم باشد.

جواب: $P(A)=\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}}$

ب) هر سه لامپ سالم باشند. (سراسری ریاضی).

جواب: $P(B)=\frac{\binom{۶}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۱۰}{۳}}$

ج) حداقل یک لامپ سوخته باشد.

جواب: حداقل یک لامپ سوخته باشد، برابر است با $C=\underbrace{۳ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۱}_{\text{لامپ سوخته}}$ که متمم آن $\acute{C}$ برابر است با این که هیچ لامپی نسوزد.

$$P(\acute{C})=۱-\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}$$

مثال: از میان ۵ مرد و ۴ زن می خواهیم یک تیم چهار نفره تشکیل دهیم. اگر افراد به تصادف انتخاب شوند، چقدر احتمال دارد:

الف) یک نفر زن باشد؟

جواب: $P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۴}}$

ب) حداقل یک نفر مرد باشد؟

جواب: حداقل یک نفر مرد باشد برابر است با $B = \underbrace{\text{۴ یا ۳ یا ۲ یا ۱}}_{\text{مرد}}$ که متمم آن $\acute{B}$ برابر است با هیچ‌کدام مرد نباشند.

$$P(\acute{B}) = ۱ - \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۴}}{\binom{۹}{۴}}$$

ج) حداقل سه نفر زن باشد؟

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۴}\binom{۵}{۰}}{\binom{۹}{۴}}$$

مثال : می خواهیم از بین ۳ دانش آموز کلاس دهم رشته ی ریاضی و ۲ دانش آموز دهم رشته ی تجربی یک تیم دو نفره ی تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر، هم رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ی ریاضی و ۱ نفر از رشته ی تجربی باشد؟

$$\text{الف)}\ P(A) = \frac{\overset{\text{ریاضی}}{\binom{۳}{۲}}\ \overset{\text{تجربی}}{\binom{۲}{۰}}}{\underset{\text{کل}}{\binom{۵}{۲}}} = \frac{۳ \times ۱}{۱۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$\text{ب}\,)\; P(B)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۰}+\binom{۳}{۰}\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳+۱}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

$$\text{پ}\,)\; P(C)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳\times ۲}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

مثال: از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۱,۲,۳,۳ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند؛ اگر به تصادف ۴ نفر از بین آن ها معرفی شوند با کدام احتمال:

الف) از هر گروه یک نفر معرفی شده اند؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۸}$ √ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۱\times ۲\times ۳\times ۳}{۱۲۶}=\frac{۱}{۷}$$

ب) حداقل دو نفر از یک گروه آزمایشی باشند.

جواب:

$$P(\acute{A})=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۷}=\frac{۶}{۷}$$

مثال: برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند؛ اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آن ها انتخاب شوند با کدام احتمال، تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوتند؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳√) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

جواب: متمم این مساله برابر است با تعداد افراد انتخابی مساوی باشند.

$$P(\acute{A}) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}} = ۱ - \frac{۶ \times ۱۵}{۲۱۰} = \frac{۲۰}{۲۱۰} = \frac{۴}{۷}$$

مثال: از هر یک از تیم های فوتبال، والیبال، هندبال و بسکتبال ۵ نفر به جلسه‌ای دعوت شده‌اند؛ اگر سه نفر به طور تصادفی از بین آن ها انتخاب شود مطلوبست احتمال آن که:

الف) دو به دو هم تیمی نباشند.

جواب: فضای نمونه‌ای برابر است با انتخاب ۳ نفر از کل افراد. یعنی ۲۰ نفر و برای پیشامدآن، ابتدا از ۴ تیم، ۳ تیم انتخاب می‌کنیم، سپس از هر تیم یک نفر انتخاب می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۲۰}{۳}}$$

ب) فقط دو نفر از آن ها هم تیمی باشند.

جواب: برای پیشامدآن ابتدا یک تیم از چهار تیم انتخاب می‌کنیم، سپس ۲ نفر از آن تیم بیرون آورده و سپس یک نفر باقیمانده را از بقیه افراد، یعنی ۱۵ نفر انتخاب می‌کنیم.

$$P(B) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۱}}{\binom{۲۰}{۳}}$$

مثال: از میان ۲۰ دانش‌آموز که در ۴ ردیف مساوی روی نیمکت‌های یک کلاس نشسته‌اند، دو نفر را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن که هر دو از یک ردیف باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ √ ۳) $\frac{۴}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۹}$

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۲۰}{۲}}=\frac{۱۰+۱۰+۱۰+۱۰}{۱۹۰}=\frac{۴۰}{۱۹۰}=\frac{۴}{۱۹}$$

مثال: از میان ۵ جفت کفش متمایز، سه لنگه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که در میان آن ها یک جفت موجود باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ √ ۴) $\frac{۱}{۳}$

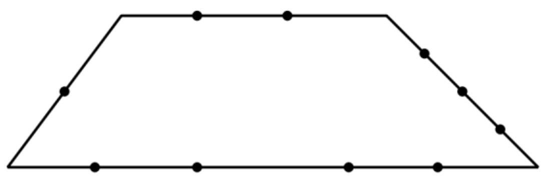
جواب:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}=\frac{۷۲۰}{۶}=۱۲۰$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یک جفت از ۵ جفت}}\times\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{یک لنگه از ۸ لنگه باقیمانده}}=۵\times۸=۴۰$$

$$P(A)=\frac{۴۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۳}$$

مثال: از میان ۱۰ نقطه‌ی زیر، ۴ نقطه به تصادف خارج می کنیم. احتمال آن که با ۴ نقطه ی انتخاب شده بتوان یک چهار ضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهار ضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی)

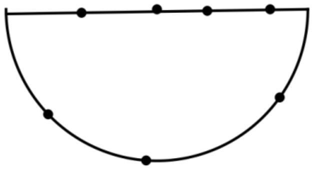


۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳۵}$ √

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱\times ۲\times ۳\times ۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$$

مثال: از نقاط شکل زیر سه نقطه به تصادف خارج می کنیم؛ احتمال آن که نقاط انتخاب شده تشکیل مثلث بدهند کدام است؟



۱) $\frac{۳۰}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۵}$ √

جواب:

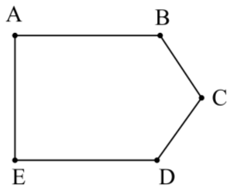
$$P(\acute{A})=۱-\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}=۱-\frac{۴}{۳۵}=\frac{۳۱}{۳۵}$$

نکته: در صورتی که سه نقطه روی یک خط باشند، مثلث تشکیل نمی‌شود.

مثال: دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این دو رأس مجاور باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ √ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

جواب:



$$A_{\text{پیشامد}} = \{AB, BC, CD, DE, EA\} \rightarrow P(A) = \frac{۵}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

مثال: اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند، اگر به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون آوریم، با کدام احتمال:

الف) جمع اعداد این دو کارت زوج است ؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ✓ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

جواب: **جمع دو عدد وقتی زوج است که یا هردو زوج باشند یا هر دو فرد باشند.**

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۳ + ۳}{۱۵} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

ب) جمع اعداد این دو کارت فرد است؟

جواب:

جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی زوج و یکی فرد باشد.

$$P(B) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۹}{۱۵}$$

ج) ضرب اعداد این دو کارت زوج است؟

جواب:

ضرب دو عدد وقتی زوج است که یا هردو زوج باشند، یا یکی زوج یکی فرد.

$$P(C)=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۱۲}{۱۵}$$

مثال: اعداد ۱،۲،...،۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است؛ بـه تصـادف دو کـارت از بین آن ها بیرون می آوریم، با کدام احتمال مجموع عـدد ایـن دو کـارت برابـر ۱۱ اسـت. (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

جواب:

$$A_{\text{پیشامد}}=\{(۲,۹),(۳,۸),(۴,۷),(۵,۶)\}\,,P(A)=\frac{۴}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

مثال: در ظرفی شش مهره با شماره های ۱,۲,۳,۴,۵,۶ ریخته شده اند دو مهره با هم بیـرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متـوالی انـد؟ (سراسـری ریاضـی ۸۵)

√۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

جواب:

$$A_{\text{پیشامد}}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\},P(A)=\frac{۵}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

مثال: در ظرفی ۱۰ مهره با شماره های ۱,۲,...,۱۰ موجود است. سه مهره بـه تصـادف و بـا هم از جعبه خارج می کنیم؛ احتمال آن که عدد یکی از مهره ها ۵ و عدد هیچکـدام ۱ یـا ۲ نباشد کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$　　۲) $\frac{۷}{۲۴}$　　۳) $\frac{۷}{۲۰}$　　$\sqrt{}$ ۴) $\frac{۷}{۴۰}$

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۲۱}{۱۲۰}=\frac{۷}{۴۰}$$

مثال: از مجموعه $A=\{۱۱,۱۲,\ldots,۲۰\}$ یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ احتمال آن که این عدد یک عدد اول است چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۳}{۱۰}$　　۳) $\frac{۴}{۹}$　　$\sqrt{}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

جواب:

$$A \text{ پیشامد } =\{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\} \text{ و } P(A)=\frac{۴}{\binom{۱۰}{۱}}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۷-۱۷احتمال های مربوط به اصل ضرب

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}=\frac{\text{خواسته ی احتمال}}{\text{کل اعداد خواسته شده}}$$

مثال: اگر با ارقام ۶، ۴، ۱، ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم، چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　۳) $\frac{۳}{۴}$ √　　۴) ۱

جواب:

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\۴\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۶}\times\overbrace{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\۴\\۶}}}^{\text{شروع}}$$

و

$$n(S)=\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\۱\\۴\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\۴\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۶}$$

$$P(A)=\frac{۳\times۲\times۱\times۳}{۴\times۳\times۲\times۱}=\frac{۱۸}{۲۴}=\frac{۳}{۴}$$

مثال: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید احتمال آن که این عدد زوج باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۳}{۸}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۳}{۵}$　　۴) $\frac{۵}{۸}$ √

جواب:

$$n(S) = \overset{\text{شروع}}{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۱)\\ ۲\\ ۳\\ ٤}}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\ ۲\\ ۳\\ ٤}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\ ۳\\ ٤}} = ۴۸$$

$$n(A) = \left\{ \underbrace{\boxed{۴}\,\boxed{۳}\,\boxed{۱}}_{\text{فقط صفر}} + \underbrace{\boxed{۳}\,\boxed{۳}\,\boxed{۲}}_{\text{۲ یا ۴}} \right\} = ۳۰ \rightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{۳۰}{۴۸} = \frac{۵}{۸}$$

تمرین: چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۲ حاصل می شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۶ حاصل می شود؟ (سراسری تجربی ۸۹ خارج از کشور)

جواب: $\frac{۵}{۹}$

تمرین: چهار رقم ۹، ۷، ۰،۵ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۱۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۶ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب ۲ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد، تعداد اعداد مضرب ۶ برابر صفر است.

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۱۵ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود، به سراغ مضرب۵ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۱۵ برابر صفر است.

مثال: با استفاده از اعداد مجموعه {۱،۲،۵،۸،۹} به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساخته‌ایم، با چه احتمالی این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰۰ کوچکتر است؟

۱√ $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

جواب:

$$n(S) = ۵! = ۱۲۰ \;, n(A) = \boxed{۱}\,\boxed{۴}\,\boxed{۳}\,\boxed{۲}\,\boxed{۱} = ۲۴, \mathrm{P(A)} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

مثال: با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود از ۴ بیشتر نیست، یا مضرب ۳ می‌باشد.(رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمی‌رود) (سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$$S = \{۱,۲,۳, \dots ,۹\} \,, n(S) = ۹$$

$A =$ پلاک مضرب۳ یا بیشتر از ۴ نیست.

$$A = \{۱,۲,۳,۴,۶,۹\}, n(A) = ۶ \rightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

مثال: از بین اعداد طبیعی سه رقمی به تصادف یک عدد برداشته‌ایم با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است(سراسری ریاضی ۸۶).

متمم سوال میشه رقم ۲ در این عدد ظاهر نشده باشد.

$$n(S): \underbrace{\boxed{9}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{10}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{10}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \qquad , \qquad n(A'): \underbrace{\boxed{8}}_{\substack{1\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{9}}_{\substack{1\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{9}}_{\substack{1\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}}$$

$$\mathrm{P}(A') = \frac{\mathrm{n}(A')}{\mathrm{n}(\mathrm{S})} = \frac{8 \times 9 \times 9}{9 \times 10 \times 10} = \frac{18}{25}$$

جواب: $P(A) = 1 - P(A') \rightarrow \quad P(A) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$

دقت کنیم : از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در این صورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته، احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم می کنیم.

۸-۱۷احتمال های مربوط به جایگشت

مثال: اگر حروف کلمه ی جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

الف) $P(A) = \frac{۲! \times ۷!}{۸!} = \frac{۲}{۸}$

مثال: سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را در یک قفسه کنارهم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه:

الف) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند.جواب: $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵!\times۳!}{۷!}$

ب)کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند. $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴!\times۴!}{۷!}$

پ) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم و کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند؟ $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲!\times۳!\times۴!}{۷!}$

مثال: با ارقام ۱و۲و۳و۴و۵ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که همواره در آن رقم های فرد کنار هم باشند ، چقدر است ؟ جواب: $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳!\times۳!}{۵!}$

مثال: با ارقام ۱و۲و۳و۴و۵ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که همواره در آن عدد ۱۲۵ به کار رفته باشد، چقدر است ؟ جواب: $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳!}{۵!}$

مثال :حروف کلمه‌ی مهتاب را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که «الف» بلافاصله بعد «ت» بیاید؟ جواب: $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴!}{۵!}$

مثال: حروف کلمه‌ی $computer$ را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که

الف) حروف صدا دار کنار هم باشند $(\mathrm{o}, \mathrm{u}, \mathrm{e})$.

جواب: $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶! \times ۳!}{۸!}$

ب) در آن ها کلمه‌ی $comp$ وجود داشته باشد.

جواب: : $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵!}{۸!}$

پ) حروف $r, \mathrm{e}, \mathrm{t}, \mathrm{p}$ کنار هم نباشند.

جواب: $p = ۱ - \frac{۵! \times ۴!}{۸!}$

تمرین: افراد A , B , C , D , E , F را در یک صف کنار هم قرار می دهیم؛ مطلوبست احتمال آنکه A , B کنار هم باشند و E , F کنار هم نباشند؟

مثال :حروف کلمه‌ی opissum را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که در آن:

الف) عبارت op وجود داشته باشد؟ $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{۶!}{۲!}}{\frac{۷!}{۲!}}$

ب) عبارت op وجود نداشته باشد؟ $p = ۱ - \frac{\frac{۶!}{۲!}}{\frac{۷!}{۲!}}$

احتمال آن که چند شیء کنار هم باشند – ۱ =احتمال آن که چند شیء کنار هم نباشند

پ)عبارت os وجود داشته باشد؟ $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶!}{\frac{۷!}{۲!}}$

ت)o و s کنارهم باشند؟ $p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶! \times ۲!}{\frac{۷!}{۲!}}$

مثال: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) حروف یکسان کنار هم باشند.

جواب:

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶!}{\frac{۸!}{۲! \times ۲!}} = \frac{۶! \times ۲! \times ۲!}{۸!}$$

ب) حروف یکسان کنار هم نباشند.

جواب: $\frac{۱۳}{۱۴}$

تمرین: حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال، سه حرف A در کنار هم قرار می‌گیرند؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

مثال: اعداد ۹، ۶، ۲ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال، دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ ✓

جواب: $p(A) = \frac{۲! \times ۲!}{۳!} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

احتمال آن که چند شیء کنار هم باشند – ۱ =احتمال آن که چند شیء کنار هم نباشند

مثال: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر می‌باشند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن‌که برادرها کنار هم نباشند.

جواب:

(احتمال برادرها کنار هم باشند – ۱)= احتمال برادرها کنار هم نباشند

$$۱-\frac{۵!\times ۲!}{۶!}=۱-\frac{۵!\times ۲}{۶\times ۵!}=۱-\frac{۲}{۶}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال: حروف کلمه‌ی $TEACH$ را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار می گیرد ؟

جواب: بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار گیرد؛ یعنی دو حرف A,E درکنار هم نیستند. بنابراین از متمم کمک می گیریم.

$$p=۱-\frac{۴!\times ۲!}{۵!}$$

مثال: با ارقام ۰و۱و۱و۲و۳ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که دو رقم ۱ کنار هم قرار گیرند کدام است؟

جواب: در جایگشت های این ۵ رقم دو تای آن ها یکسان هستند. در ضمن صفر سمت چپ قرار نمی گیرد، بنابراین داریم:

$$n(S)=\frac{۴\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!}=۴۸$$

اما برای یافتن تعداد حالت های مطلوب دو رقم ۱ را با هم در نظر می گیریم پس ۴ شیء متمایز داریم که صفر نمی تواند سمت چپ باشد:

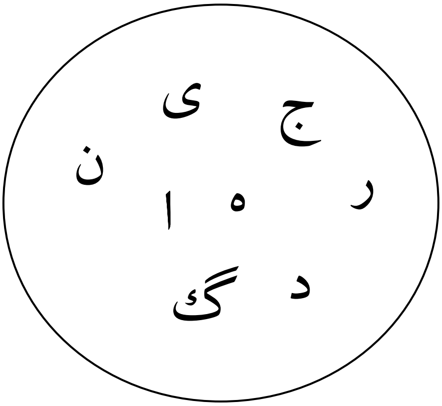
$$n(A)=۳\times ۳\times ۲\times ۱=۱۸\rightarrow P(A)=\frac{۱۸}{۴۸}=\frac{۳}{۸}$$

مثال : اگر حروف کلمه ی جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد: الف) حرف « ی» آخر باشد؟

ب) با حرف « ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

الف) $P(A) = \frac{۷!}{۸!} = \frac{۱}{۸}$

ب) ج ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ای $\quad P(C) = \frac{۶!}{۸!} = \frac{۱}{۵۶}$



مثال: : حروف کلمه‌ی TARANEH را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\underset{\text{حرف }A}{\boxed{۱}}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱} = ۶!$$

$$n(A) = ۶!\,,\quad n(S) = \frac{۷!}{۲!}\qquad ,P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶!}{\frac{۷!}{۲!}} = \frac{۲!\times ۶!}{۷\times ۶!} = \frac{۲}{۷}$$

مثال : حروف کلمه‌ی ARAYEHA را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\underset{\text{حرف }A}{\boxed{۱}}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=\frac{۶!}{\underset{\text{تعداد }A\text{های تکراری}}{۲!}}$$

$$n(A)=\frac{۶!}{۲!}\ ,\ n(S)=\frac{۷!}{۳!}\ ,P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳!\times۶!}{۲!\times۷!}=\frac{۳\times۲\times۱\times۶!}{۲\times۱\times۷\times۶!}=\frac{۳}{۷}$$

مثال: حروف کلمه‌ی $computer$ را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که حروف r , c در اول و آخر کلمه باشند؟

جواب:

$$\underset{c}{\underset{(r)}{\boxed{۲}}}\times\underbrace{\boxed{\ }\times\boxed{\ }\times\boxed{\ }\times\boxed{\ }\times\boxed{\ }\times\boxed{\ }}_{۶!}\times\underset{c}{\boxed{۱}}=۶!\times۲$$

$$n(A)=۶!\times۲,\ n(S)=۸!\ ,P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۶!}{۸!}=\frac{۲\times۶!}{۸\times۷\times۶!}=\frac{۱}{۲۸}$$

مثال: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر هستند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن که برادرها در اول و آخر صف باشند.

جواب:

$$n(S)=۶!,n(A)=\boxed{۲}\times\underbrace{\boxed{\ }\times\boxed{\ }\times\boxed{\ }\times\boxed{\ }}_{۴!}\times\boxed{۱}$$

$$p(A)=\frac{۴!\times۲}{۶!}=\frac{۴!\times۲}{۶\times۵\times۴!}=\frac{۱}{۱۵}$$

مثال: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را بریده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) حروف R,L در اول و آخر کلمه باشند.

جواب:

$$n(A)=\frac{۲\times۶!}{۲!\times۲!}\ ,\ n(S)=\frac{۸!}{۲!\times۲!}\ ,P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۶!}{۸!}=\frac{۲\times۶!}{۸\times۷\times۶!}=\frac{۱}{۲۸}$$

ب)حروف R,G در اول و آخر کلمه باشند.

ج)حروف A, G در اول و آخر کلمه باشند.

مثال: ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه به طور یک در میان قرارگرفته باشند؟

$$n(A) = (۴! \times ۴!) \times ۲ \quad ؛n(S) = ۸! \quad ؛P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(۴! \times ۴!) \times ۲}{۸!}$$

مثال: ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه پسرها به طور یک در میان قرارگرفته باشند ؟

$$n(A) = (۴! \times ۴!) \times ۲ \quad ؛n(S) = ۸! \quad ؛P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(۴! \times ۴!) \times ۲}{۸!}$$

مثال: ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه هیچ دو دختری متوالی نباشند؟(یعنی دخترها یک در میان باشند)

$$n(A) = (۴! \times ۴!) \times ۲ \quad ؛n(S) = ۸! \quad ؛P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(۴! \times ۴!) \times ۲}{۸!}$$

مثال: ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ به طور تصادفی کنارهم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه، رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟

$$n(A)\frac{۳! \times ۳! \times ۲}{۳!} = \frac{۳! \times ۲}{۱} = ۶ \times ۲ = ۱۲,\ n(S) = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۱۲۰} = ۰/۱$$

تمرین: در ساختن یک کلمه شش حرفی باحروف کلمه PANAMA احتمال آن که حروف A یک در میان باشند کدام است؟

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه به طور یک در میان قرارگرفته باشند؟

$$n(A) = ۴! \times ۳! \quad ، n(S) = ۷! \quad ؛ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۴!}{۷!}$$

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه دخترها به طور یک در میان قرارگرفته باشند؟

$$n(A) = ۴! \times ۳! \quad ، n(S) = ۷! \quad ؛ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۴!}{۷!}$$

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه پسرها به طور یک در میان قرارگرفته باشند؟

$$n(A) = (۴! \times ۳!) \times ۳ \quad ، n(S) = ۷! \quad ؛ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(۴! \times ۳!) \times ۳}{۷!}$$

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه هیچ دو دختری متوالی نباشند؟(یعنی دخترها یک در میان باشند)

$$n(A) = ۴! \times ۳! \quad ، n(S) = ۷! \quad ؛ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۴!}{۷!}$$

مثال: ارقام عدد ۱۲۳۴۵۶۷ به طور تصادفی کنارهم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه

الف) ارقام فرد یک در میان باشند؟ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۴!}{۷!}$

جواب: $۴! \times ۳!$

ب) هیچ دو رقم فردی متوالی نباشند؟ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۴!}{۷!}$

ج) ارقام زوج یک در میان باشند؟ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴! \times ۳! \times ۳}{۷!}$

د) بین هر دو رقم فرد، یک رقم زوج قرار گیرد؟ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۴!}{۷!}$

مثال: چهار نوع کتاب علمی متمایز، و پنج نوع کتاب ادبی متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار می دهیم، مطلوبست احتمال آنکه کتاب‌های علمی یک در میان قرار بگیرند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۴! \times ۳}{۹!}$$

مثال: ظرفی شامل ۶ مهره‌ی سفید متمایز و ۵ مهره‌ی سیاه متمایز است. مهره‌ها را یکی پس از دیگری به تصادف و بدون جایگذاری خارج می کنیم؛ چقدر احتمال دارد:

الف) مهره‌های سیاه و سفید، به صورت یک در میان خارج شده باشند.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶! \times ۵!}{۱۱!}$

ب) مهره‌های سفید یک در میان باشند. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶! \times ۵!}{۱۱!}$

پ) دو مهره‌ی سفید به صورت متوالی خارج نشود. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶! \times ۵!}{۱۱!}$

ت) مهره‌های سیاه یک در میان خارج شده باشند. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶! \times ۵! \times ۳}{۱۱!}$

ج) بین دو مهره‌ی سیاه، فقط یک مهره‌ی سفید قرار گیرد. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶! \times ۵! \times ۳}{۱۱!}$

مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد، متوالیاً خارج نمی‌شود؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۰/۱ √ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۲!}{۵!} = \frac{۱۲}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$

مثال: در سؤال قبل اگر مهره‌ها با شماره زوج یک در میان باشند، احتمال را به‌دست آورید.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۲! \times ۳}{۵!} = \frac{۶ \times ۲ \times ۳}{۱۲۰} = \frac{۳۶}{۱۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$

۹-۷ احتمال های مربوط به انتخاب همراه با جایگشت

مثال: با استفاده ازحروف کلمه‌ی $computer$ به تصادف یک کلمه‌ی ۵ حرفی ساخته ایم مطلوبست احتمال آن که:

الف) در آن حرف r به کار رفته باشد.

$$n(A)=\binom{۷}{۴}\times ۵! \;\text{؛}\; n(S)=\binom{۸}{۵}\times ۵! \;\text{؛} P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۴}\times ۵!}{\binom{۸}{۵}\times ۵!}=\frac{۳۵}{۵۶}$$

ب) در آن حروف r , u به کار رفته باشد.

$$n(A)=\binom{۶}{۳}\times ۵! \;\text{؛}\; n(S)=\binom{۸}{۵}\times ۵! \;\text{؛} P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}\times ۵!}{\binom{۸}{۵}\times ۵!}$$

ج) در آن حروف r,u به کار نرفته باشد.

$$n(A)=\binom{۶}{۵}\times ۵! \;\text{؛}\; n(S)=\binom{۸}{۵}\times ۵! \;\text{؛} P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۵}\times ۵!}{\binom{۸}{۵}\times ۵!}$$

مثال: با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹ به تصادف یک عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می سازیم؛ مطلوبست احتمال آن که دو رقم از عدد سه رقمی ساخته شده زوج باشد؟

جواب:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو رقم از زوج ها}}\times\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک رقم از فرد ها}}\times\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ارقام}} \;\text{؛}\; n(S)=\binom{۷}{۳}\times ۳!$$

مثال: ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در یک قفسه کنارهم می چینیم مطلوبست احتمال آنکه

الف)یکی در میان در قفسه چیده شوند؟

$$n(A)=\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}\times ۴!\times ۳! \quad ؛\quad n(S)=\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}\times ۷!$$

ب) کتاب‌های سال اول یکی در میان باشند.

$$n(A)=\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}\times ۴!\times ۳!\times ۳ \quad ؛\ n(S)=\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}\times ۷!$$

ب) هیچ دو کتاب سال دومی متوالی نباشد.

$$n(A)=\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}\times ۴!\times ۳! \quad ؛\quad n(S)=\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}\times ۷!$$

مثال: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۶ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{\dagger\dagger\dagger}}_{\text{سه فرزند}}\ \underbrace{\dagger}_{\text{پدر}}\ \underbrace{\dagger}_{\text{مادر}}$$

$$n(S)=P(۶,۵)\ ,n(A)=\underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}}\times\underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}}\times\underbrace{۲}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A)=\frac{۳!\times ۳!\times ۲}{P(۶,۵)}=\frac{۷۲}{۷۲۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

مثال: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۷ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$n(S)=P(۷,۵)\ ,n(A)=\underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}}\times\underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}}\times\underbrace{۳}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A)=\frac{۳!\times ۳!\times ۳}{P(۷,۵)}=\frac{۱۰۸}{۲۵۲۰}$$

مثال: هر یک از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ را در یکی از ۶ خانه‌ی هم ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$$n(S) = P(۶,۵) \ \ ,n(A) = ۴! \times ۲! \times ۲$$

مثال: تعداد ۷ نفر که ۲ برادر در بین آن ها حضور دارند، مفروضند. از بین آن ها ۵ نفر را انتخاب می کنیم و در یک ردیف کنار هم می نشانیم، با چه احتمالی دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف نشسته اند؟

جواب: درمحاسبه تعداد اعضای فضای نمونه ای، ابتدا ۵ نفر از ۷ نفر را انتخاب می کنیم و سپس آن ها را در یک ردیف می نشانیم که !۵ جایگشت دارند:

$$n(S) = \binom{۷}{۵} \times ۵! = \frac{۷!}{۵! \times (۷-۵)!} \times ۵! = \frac{۷!}{۲} = ۲۵۲۰$$

برای آن که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند باید حتما در بین انتخاب شده ها باشند. در نتیجه باید سه نفر از ۵ نفر باقیمانده را انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را طوری محاسبه می کنیم که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند:

$$n(A) = \boxed{۲} \times \boxed{\binom{۵}{۳} \times ۳!} \times \boxed{۱} = ۱۲۰ \text{ و } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲۱}$$

پایان احتمال

بخش دوم

آمار

۱۰-۷تعریف آمارو علم آمار:

آمار: مجموعه ای از اعداد ، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، ساماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

مراحل علم آمار

۱- جمع آوری اعداد و ارقام

۲- ساماندهی و نمایش

۳- تحلیل و تفسیر داده ها

۴- نتیجه گیری و قضاوت

مثال :کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اولین قدم در استفاده از « علم آمار» جمع آوری داده هاست. درست

ب) پیش بینی و تصمیم گیری برای آینده، نتیجه گیری استفاده از « علم آمار» است.

درست

پ) « علم آمار» همان اعداد و ارقام است. نادرست

اندازه‌گیری

در رسیدن به اطلاعات عددی با معیار مناسب برای انجام بررسی آماری، نسبت دادن عدد به موضوع مورد مطالعه را اندازه گیری گوییم.

اولین قدم در رسیدن به اطلاعات عددی برای انجام بررسی آماری یک یا چند موضوع اندازه‌گیری است.

به عنوان نمونه برای رسیدن به اطلاعات عددی در بررسی پیشرفت سالانه تولید گندم در کشور، مقدار گندم تولید شده در سال اندازه گیری شده و به صورت عدد مشخص می‌شود.

مثال: نسبت دادن عدد به موضوع موردمطالعه برای رسیدن به اطلاعات عددی با معیاری مناسب کدام است؟

۱) نمونه‌گیری √ ۲) اندازه‌گیری ۳) مدل سازی ریاضی ۴) سرشماری

مثال: اولین قدم دررسیدن به اطلاعات عددی ....است.

۱) نمونه‌گیری √ ۲) اندازه‌گیری ۳) مدل سازی ریاضی ۴) سرشماری

۱۱-۷ تعریف جامعه یا جمعیت:

مجموعه ی تمام افراد یا اشیایی که درباره ی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می شود و هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می نامند.

مثال: دانش آموزان یک مدرسه می توانند یک جامعه باشند و هریک از دانش آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند

صفت: به کمیت یا کیفیتی که متعلق به عناصر جامعه آماری باشد صفت گوییم و بر دو نوع است:

۱)**صفت ثابت**: همه ی عناصر جامعه آن را دارا باشند مانند کارمندان شرکت نفت

۲)**صفت متغیر** :ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند. مانند گروه خونی

مقدار متغیر: عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می شود، مقدار متغیر می گویند

نکته: اعضای جامعه آماری حداقل یک صفت مشترک دارند.

مشاهده آماری: جمع آوری اطلاعات مربوط به صفات متغیر دریک جامعه آماری را مشاهده آماری می‌گویند.

۲-۲ روش‌های مطالعه آمار

مطالعه آماری موضوع یا موضوعات به دو روش ***سرشماری*** و ***نمونه‌گیری*** انجام می‌گیرد.

۱-۲-۲ سرشماری

مطالعه یا بررسی تمام اعضای جامعه آماری را روش سرشماری گویند.

مهمترین مشکلات سرشماری:

** بالا بودن هزینه*

** وقت‌گیر بودن*

** در دسترس نبود ن اعضای جامعه*

* از بین رفتن اعضای جامعه در بعضی مطالعات

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

به عنوان مثال دانش آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می شو

تعداد اعضای جامعه و نمونه را به ترتیب اندازه جامعه و نمونه گویند.

مثال : کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازه ی جامعه کمتر از اندازه ی نمونه است. نادرست

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه اند. نادرست

ج) نمونه ی زیر مجموعه ای از جامعه است. درست

نکته: عمل نمونه گیری مهمترین بخش آمار است، نمونه‌ای می‌تواند نمایانگر خصوصیات جامعه آماری باشد که:

۱) به اندازه کافی بزرگ باشد.

۲) اعضایش به‌طور تصادفی انتخاب شوند.

هرچه تنوع موضوع در جامعه بیشتر باشد اندازه نمونه بزرگتر انتخاب می‌شود.
انتخاب اعضای نمونه نباید از قانونی پیروی کند.
معمولاً اندازه نمونه حداقل ۱۰ درصد اندازه جامعه است.

مثال: افراد یا اشیایی که موضوع یا موضوعاتی روی آن‌ها مطالعه می‌شود، کدام است؟

۱)نمونه ۲)سرشماری ۳)جامعه √ ۴)نمونه‌گیری

مثال: مطالعه و بررسی آماری تمام اعضای جامعه کدام است؟

۱)نمونه　　　√ ۲)سرشماری　　　۳)جامعه　　　۴)نمونه‌گیری

مثال: از بین رفتن اعضای جامعه در بعضی موضوعات مربوط به کدام روش آماری است؟

۱)نمونه گیری　　√ ۲) سرشماری　　　۳)اندازه گیری　　　۴)مدل سازی

مثال: برای کدام موضوع در کلاس اندازه نمونه بزرگ‌تر است؟

۱)قد　　　۲)سن　　　۳)هوش　　　√ ۴)معدل

مثال: کدام نمونه به‌خوبی بیانگر خصوصیات جامعه نیست؟

۱)به اندازه کافی بزرگ باشد.　　　√۲) اعضایش قانونی انتخاب شوند.

۳)اعضایش تصادفی انتخاب شوند.　　　۴)اندازه‌اش بیشتراز ۱۰درصدجامعه باشد.

نمونه تصادفی: نمونه‌ای است که اعضایش به‌طور تصادفی انتخاب شوند و روش انتخاب اعضایش از دو ویژگی زیر پیروی کند:

۱) امکان انتخاب تمام اعضای جامعه در نمونه وجود داشته باشد.

۲) شانس انتخاب تمام اعضای جامعه برای نمونه یکسان باشد.

مثال: در کدام مورد عمل سرشماری انجام نشده است؟(سراسری انسانی)

۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد.　　۲) نمونه همان جامعه آماری است.

۳) اندازه ی نمونه برابر اندازه ی جامعه است.　　√ ۴) نمونه، زیر مجموعه ی جامعه ی آماری است.

مثال: هدف اصلی علم آمار کدام است؟

۱) تبدیل اطلاعات به یکدیگر　　　۲) تبدیل اطلاعات به داده ها

√۳)تبدیل داده ها به اطلاعات　　　۴)تبدیل داده ها به یکدیگر

۷-۱۲ متغیرهای تصادفی

۱-۳ متغیر تصادفی

موضوع یا موضوعاتی را که در نمونه یا جامعه موردمطالعه قرار می‌گیرند، متغیر تصادفی گوییم.

> *متغیر تصادفی دارای حالت‌ها یا مقادیری است که به‌طور **تصادفی** در بین اعضای جامعه یا نمونه **تغییر** می‌کنند.*

متغیر تصادفی به دو دسته **کمی** و **کیفی** تقسیم می‌شوند:

متغیر تصادفی کمی: متغیری که قابل‌اندازه‌گیری است و نتیجه آن عدد هست.

متغیر تصادفی کیفی: متغیری که قابل‌اندازه‌گیری نیست و دارای مقولات یا حالات مختلف است.

مثال: کدام متغیر تصادفی کمی است؟

۱)جنسیت افراد ۲) وضعیت تأهل افراد √ ۳) نمره درس دانش آموزان ۴)گروه خونی افراد

مثال: کدام متغیر تصادفی کیفی است؟

۱)میزان بارندگی در شهر ۲)درآمد افراد شاغل ۳)قد دانش آموزان √ ۴)نوع تلفن افراد

متغیر تصادفی کمی در بین اعضای نمونه یا جامعه قابل مقایسه است.

مثال: با کدام متغیر **نمی‌توان** دانش آموزان کلاس را با هم مقایسه کرد؟

۱)نمره درس √ ۲)گروه خونی ۳) وزن ۴)تعداد اعضای خانواده

مثال : نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده) کیفی

ب) مدت زمانی که طول می کشد از خانه به مدرسه برسید. کمی

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه ای) کیفی

مثال :جدول زیر را کامل کنید.

سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
موی شما چه رنگی است؟	مشکی، قهوه ای، طلایی، سفید، قرمز	کیفی
وزن شما چه عددی است؟	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	کمی
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می برید؟	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم، لذت نمی برم	کیفی

۱-۱-۳ انواع متغیر تصادفی

متغیر تصادفی کمی دارای دو نوع پیوسته و گسسته است. همچنین متغیر تصادفی کیفی نیز دارای دو نوع ترتیبی و اسمی است.

متغیر کمی پیوسته: متغیر کمی که مقادیرش بین دو مقدار دلخواه تغییر می‌کند و قابل‌شمارش نیستند.

متغیر کمی گسسته: متغیر کمی که مقادیرش اعداد صحیح است و قابل‌شمارش هستند.

متغیرهای تصادفی کمی گسسته از نوع تعداد می‌باشند.

تذکر: متغیرهای تصادفی که می‌توان تعداد آن‌ها به‌صورت نیم هم شمرد جز متغیرهای تصادفی گسسته هستند مانند تعداد طبقات ساختمان که در صورت ناتمام بودن یک طبقه به‌صورت ۱/۵، ۲/۵، ۳/۵،... طبقه شمرده می‌شود.

مثال :با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمی زیر را مشخص کنید.

الف) سرعت خودرو یک متغیر کمی پیوسته است . مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر کمی پیوسته و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر کمی گسیسته است و این تعداد برابر با ۴ است

انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) تعداد ماهی های یک دریا (گسسته)

ب) مدت زمانی که طول می کشد از خانه به مدرسه برسید (پیوسته)

پ) وزن افراد (پیوسته)

ت) تعداد دانش آموزان یک مدرسه (گسسته)

مثال: فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱/۶۰ سانتی متر باشد.

الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید.

$$\text{شاخص توده ی بدن} = \frac{\text{وزن}}{\text{قد}^{۲}}$$

$$\text{شاخص توده ی بدن} = \frac{۹۵}{(۱/۶)^{۲}} = ۳۷/۱۰$$

ب) شاخص تودهٔ بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟ کمی، پیوسته

مثال :در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیری (گسسته یا پیوسته) است؟

سؤال متغیر	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی متر	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	۸۰ /۵ کیلوگرم	پیوسته

تعداد دوستان شما چند نفر است؟	۰، ۱، ۲، ۳،.................	گسسته
وزن دوستتان چه عددی است؟	۷۰، ۷۱، ۷۲و..............کیلوگرم	پیوسته
شاخص توده ی بدن خانواده ی شما چه عددی است؟	۲۲، ۳۲/۵ ، ۳۰ و........	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	عددی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی متر	پیوسته

متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری). مانند مقاطع تحصیلی(ابتدایی، متوسطه اول، متوسطه دوم، دانشگاهی)

متغیر کیفی اسمی(غیر ترتیبی): متغیر کیفی که حالاتش دارای ترتیب نیستند. مانند جنسیت(زن و مرد) و گروه خونی (A,B,AB,O)

اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

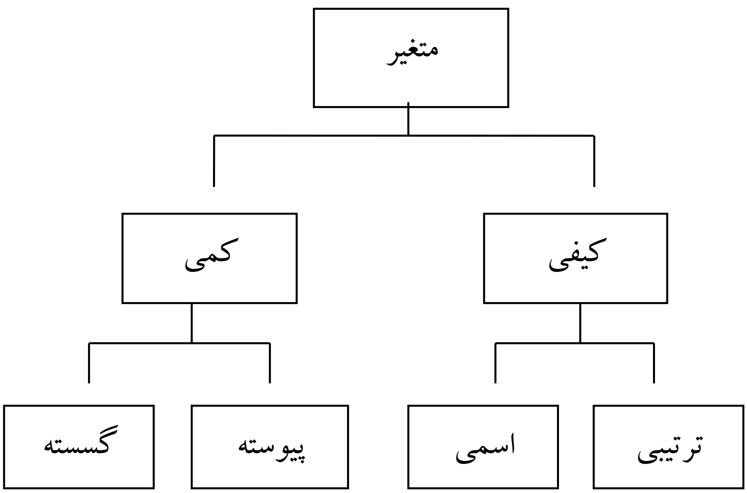
الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهم سال)

ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه ای، طلایی)

ت) کیفیت میوهٔ هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

انواع متغیرها در یک نگاه



مثال: نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- طول مکالمات تلفنی یک اداره (کمی پیوسته)
- تعداد نامه های یک صندوق (کمی گسسته)
- وزن نامه های موجود در یک صندوق (کمی پیوسته)
- زمانیکه یک بیمار در اتاق انتظار مطب یک پزشک منتظر است (کمی پیوسته)

- تعداد بیماران مراجعه کننده به یک پزشک در طول روز (کمی گسسته)
- نوع تلفن مورد استفاده شهروندان (کیفی اسمی)
- وضع سواد(با سواد، بیسواد) (کیفی اسمی)
- وضعیت مسکن(صاحب مسکن، بدون مسکن ملکی) (کیفی اسمی)
- میزان اجاره بها به وسیله ی شهروندان (کمی پیوسته)
- میزان پرداخت مالیات سالانه ساختمانهای مسکونی(کمی پیوسته)
- میزان بارندگی در یک شهر در طول سال (کمی پیوسته)
- مقاومت یک ترانزیستور(کمی پیوسته)
- گنجایش آب یک تانکر (کمی پیوسته)
- درآمد دانشجویان شاغل به کار (کمی گسسته)
- وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت (کیفی اسمی)
- سن دانشجویان شرکت کننده در یک دوره هنری (کمی پیوسته)

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید؟

الف)میزان آلودگی هوای شهر تهران	کمی پیوسته
ب) زمان انتظار بیمار در مطب پزشک	کمی پیوسته
پ) تعداد غایبین کلاس‌های دبیرستان	کمی گسسته
ت)تعداد مکالمات تلفن افراد	کمی گسسته
ث) ارزشیابی توصیفی دانش آموزان(ضعیف، متوسط، خوب،عالی)	کیفی ترتیبی
ح) مراحل رشد انسان(نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان‌سال، پیر)	کیفی ترتیبی
خ)وضعیت تأهل افراد(مجرد، متأهل)	کیفی اسمی
ج) گروه خونی افراد (A , B , AB , O)	کیفی اسمی

مثال :نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته بندی کنید.

متغیر	نوع متغیر

۱- میزان بارندگی بر حسب سانتی متر در یک شهر	کمی پیوسته
۲- نوع بارندگی (باران، برف)	کیفی اسمی
۳-تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	کمی گسسته
۴- میزان دمای هوا	کمی پیوسته
۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی
۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	کیفی اسمی
۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی

مثال : جدول زیر متغیرهای دانش آموزان را نشان می دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیر های دانش آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی
سن	×			×	
نمره ریاضی نهم	×			×	
جنسیت (دختر و پسر)		×			
قد	×			×	

وزن	×			×		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		×			×	
شاخص تودهٔ بدن	×			×		
تعداد مسافران قطار	×		×			

مثال :جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمی پیوسته
کیفیت یک هلو	کیفی ترتیبی
اندازه ی طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمی پیوسته
اقوام ایرانی	کیفی اسمی
وضعیت آب و هوا	کیفی اسمی
دمای هوا در قله	کمی پیوسته
فشار هوا در قله کوه	کمی پیوسته

مثال: کدام‌یک از متغیرهای زیرکمی پیوسته است.

۱) تعداد نامه‌های یک صندوق ۲) جنسیت افراد √ ۳) میزان بارندگی ۴) گروه خونی

مثال: متغیر « نوع تلفن مورداستفاده شهروندان » .... است.

۱) کمی گسسته   √ ۲) کیفی اسمی   ۳) کیفی ترتیبی   ۴) کمی پیوسته

مثال: تعداد پاکت‌های موجود در یک صندوق پست یک متغیر............است؟

۱)کیفی- ترتیبی   ۲) کیفی اسمی   ۳) کمی پیوسته   √ ۴) کمی گسسته

مثال:مقطع تحصیلات افراد یک شهر، کدام نوع متغیر است؟(سرا سری انسانی۸۸)

√ ۱)کیفی ترتیبی   ۲) کیفی اسمی   ۳) کمی پیوسته   ۴) کمی گسسته

مثال: قطر تنه ی درختان یک باغ کدام نوع متغیر است؟(سراسری انسانی)

۱)کیفی ترتیبی   ۲) کیفی اسمی   √ ۳) کمی پیوسته   ۴) کمی گسسته

مثال: کدامیک از متغیرهای تصادفی زیر یک متغیر کمی گسسته است؟

۱)وزن   ۲)مراحل سن   ۳) دین   ۴) پول

جواب گزینه ۴(وزن کمی پیوسته، مراحل سن کیفی ترتیبی، دین کیفی اسمی) سن کمی پیوسته است.

مثال: تعدادپاکت های موجود در یک صندوق پست یک متغیر...........است؟

۱)کیفی- ترتیبی   ۲) کیفی اسمی   ۳) کمی پیوسته   √ ۴) کمی گسسته

مثال: مدت زمان مکالمه با تلفن یک پارامتر ....است؟

۱)کیفی-ترتیبی   ۲) کیفی اسمی   √۳)کمی پیوسته   ۴) کمی گسسته

مثال: گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟ (سراسری تجربی ۸۷و ۹۰)

۱)کیفی-اسمی   ۲) کیفی ترتیبی   ۳) کمی پیوسته   ۴)کمی گسسته

مثال: نوع آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟ (سراسری ۹۱ خ)

۱)کمی گسسته   ۲)کمی پیوسته   √ ۳) کیفی اسمی   ۴) کیفی ترتیبی

(نوع آلایندگی : مونواکسید کربن. دی اکسید کربن و ...)

مثال: میزان آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟

۱)کمی گسسته　　　۲)کمی پیوسته √　　　۳)کیفی اسمی　　　۴)کیفی ترتیبی